МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ

для поступающих на третий курс

1. Задан вектор $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ единичной длины.

а)④ Найти объём множества

$$G = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ 2\left(\vec{x}, \vec{a}\right)^2 \le |\vec{x}| \le 1 \right\}.$$

б)② Найти массу поверхности

$$S = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ |\vec{x}| = 1 \right\}$$

с поверхностной плотностью

$$\rho\left(\vec{x}\right) = \frac{1}{2 + \left(\vec{x}, \vec{a}\right)}.$$

2. Задан функционал

$$J(y) = \int\limits_1^2 \Big(4\left(y(x)\right)^2 + x^2\left(y'(x)\right)^2 + 4xy(x)y'(x) \Big)\, dx, \qquad y(1) = 0, \quad y(2) = 1.$$

а)④ Найти допустимые экстремали функционала J.

б)② Исследовать найденные экстремали на экстремум и строгий экстремум.

3. Заданы параболоид P и прямая L:

$$P = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = x^2 + y^2 \right\}, \quad L = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z + 2 = 2x = y \right\}.$$

Система координат декартова прямоугольная.

а)① Доказать, что параболоид P и прямая L не пересекаются.

б)③ Найти точку параболоида P, ближайшую к прямой L.

в)② Найти расстояние от параболоида P до прямой L.

4. Задана функция

$$f(z) = \frac{z}{\sin\left(\frac{1}{z}\right) - 1}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

а)② Найти все изолированные особые точки функции f и определить их тип.

б)④ Для окружности

$$C = \left\{ \, z \in \mathbb{C} \; : \; \left| z - \frac{i}{3} \right| = \frac{1}{2} \, \right\},$$

ориентированной против часовой стрелки, вычислить интеграл

$$\oint\limits_C f(z)\,dz.$$

5.⑥ Для любого положительного числа R рассматриваются две полуокружности в комплексной плоскости

$$C_R^+ = \{\, z \in \mathbb{C} \;:\; |z| = R, \;\; \operatorname{Im} z > 0 \,\}, \quad C_R^- = \{\, z \in \mathbb{C} \;:\; |z| = R, \;\; \operatorname{Im} z < 0 \,\},$$

ориентированные против часовой стрелки. Задана функция

$$f(z) = \frac{\exp(iz)}{z^2 + iz + 2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

а)① Вычислить предел

$$\lim_{R \to +\infty} \int\limits_{C_R^+} f(z)\,dz.$$

б)② Вычислить предел

$$\lim_{R \to +\infty} \int\limits_{-R}^{R} f(x)\,dx.$$

в)③ Вычислить предел

$$\lim_{R \to +\infty} \int\limits_{C_R^-} f(z)\,dz.$$

ОТВЕТЫ

для поступающих на третий курс

1. Задан вектор $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ единичной длины.

а)④ Найти объём множества

$$G = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ 2\,(\vec{x}, \vec{a})^2 \le |\vec{x}| \le 1 \right\}.$$

б)② Найти массу поверхности

$$S = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ (\vec{x}, \vec{x}) = 1 \right\}$$

с поверхностной плотностью

$$\rho\,(\vec{x}) = \frac{1}{2 + (\vec{x}, \vec{a})}.$$

Ответ: а) $\frac{8\pi}{5\sqrt{2}} - \frac{\pi}{30}$; б) $2\pi \ln 3$.

Решение: а) В сферических координатах с полярным углом $\theta \in [0, \pi]$, отсчитываемым от направления $\vec{a}$ множество G задаётся неравенствами:

$$2r\cos^2\theta \le 1, \quad 0 \le r \le 1.$$

Имеем:

$$V_G = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} r^2\,dr \int\limits_0^{\pi} 2\pi \sin\theta\,d\theta + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} r^2\,dr \int\limits_{|\cos\theta| \le \frac{1}{\sqrt{2r}}} 2\pi \sin\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{1}{8} + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} r^2\,dr \int\limits_{|t| \le \frac{1}{\sqrt{2r}}} 2\pi\,dt = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{\sqrt{2}} \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} r^{\frac{3}{2}}\,dr =$$

$$= \frac{\pi}{6} + \frac{8\pi}{5\sqrt{2}}\left(1 - \frac{1}{4\sqrt{2}}\right) = \frac{8\pi}{5\sqrt{2}} - \frac{\pi}{30}.$$

Инструкция: В тройном интеграле сделан верный переход к сферическим координатам — 2 очка.

б) Параметризуя сферу S сферическими координатах с полярным углом $\theta \in$ $\in [0, \pi]$, отсчитываемым от направления $\vec{a}$, находим:

$$\int\limits_S \rho\,(\vec{x})\ dS = 2\pi \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin\theta\,d\theta}{2 + \cos\theta} = 2\pi \int\limits_{-1}^{1} \frac{dt}{2 + t} = 2\pi \ln 3.$$

Инструкция: В поверхностном интеграле сделан верный переход к сферическим координатам — 1 очко.

2. Задан функционал

$$J(y) = \int_1^2 \Big(4\left(y(x)\right)^2 + x^2\left(y'(x)\right)^2 + 4xy(x)y'(x)\Big)\,dx, \qquad y(1)=0, \quad y(2)=1.$$

а)④ Найти допустимые экстремали функционала J.

б)② Исследовать найденные экстремали на экстремум и строгий экстремум.

Ответ: а) $y_*(x) = \frac{4}{7}\left(x - \frac{1}{x^2}\right)$; б) y_* — строгий минимум.

Решение: а) Уравнение Эйлера—Лагранжа:

$$8y + 4xy' - \frac{d}{dx}\left(2x^2y' + 4xy\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2y'' + 2xy' - 2 = 0.$$

Его общее решение имеет вид

$$y(x) = Ax + \frac{B}{x^2}.$$

Из граничных условий

$$A + B = 0, \quad 2A + \frac{B}{4} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad A = -B = \frac{4}{7}.$$

Следовательно, единственная допустимая экстремаль

$$y_*(x) = \frac{4}{7}\left(x - \frac{1}{x^2}\right).$$

Инструкция: Выписано уравнение Эйлера—Лагранжа — 1 очко. Найдено его общее решение — 2 очка. Найдено решение, удовлетворяющее граничным условиям — 1 очко.

б) Для любой функции $h \in C^1[1,2]$ вида $h(1) = h(2) = 0$ и $h \not\equiv 0$ имеем:

$$J(y_* + h) - J(y_*) = \int_1^2 \Big(4\left(h(x)\right)^2 + x^2\left(h'(x)\right)^2 + 4xh(x)h'(x)\Big)\,dx =$$

$$= \int_1^2 \Big(4\left(h(x)\right)^2 + x^2\left(h'(x)\right)^2\Big)\,dx + \underbrace{2xh^2(x)\Big|_{x=1}^{x=2}}_{=0} - \int_1^2 2\left(h(x)\right)^2\,dx =$$

$$= \int_1^2 \Big(2\left(h(x)\right)^2 + x^2\left(h'(x)\right)^2\Big)\,dx > 0$$

Инструкция: В приращении функционала верно проведено интегрирование по частям — 1 очко.

3. Заданы параболоид P и прямая L:

$$P = \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ z = x^2 + y^2\ \}, \quad L = \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ z + 2 = 2x = y\ \}.$$

Система координат декартова прямоугольная.

а)① Доказать, что параболоид P и прямая L не пересекаются.

б)③ Найти точку параболоида P, ближайшую к прямой L.

в)② Найти расстояние от параболоида P до прямой L.

Ответ: б) $\frac{1}{5}(1,2,1)$; в) $\frac{3}{\sqrt{5}}$.

Решение: а) Если существует точка $(x,y,z) \in P \cap L$, то

$$x^2 + y^2 = z = 2x - 2 \quad \Rightarrow \quad 0 = (x-1)^2 + y^2 + 1 \geq 1 \quad \text{— противоречие.}$$

Инструкция: Получено явное противоречие в предположении, что выполнено $P \cap L \neq \varnothing$ — 1 очко.

б) Пусть точка $(x,y,z) \in P$ — ближайшая к L. Тогда нормаль к параболоиду P в этой точке — $(2x, 2y, -1)$ — перпендикулярна направляющему вектору прямой L — $\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$:

$$x + 2y - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1 - 2y.$$

Точка прямой L, ближайшая к параболоиду P, имеет вид

$$(x,y,z) + t(2x, 2y, -1) \in L \quad \text{для подходящего } t > 0.$$

Получаем:

$$z - t + 2 = 2x(1+2t) = y(1+2t) \quad \Rightarrow \quad y = 2x.$$

Следовательно, $y = 2(1-2y) = 2 - 4y$, откуда

$$y = \frac{2}{5}, \quad x = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}, \quad z = \frac{1}{25} + \frac{4}{25} = \frac{1}{5}.$$

Инструкция: Записано условие перпендикулярности нормали к параболоиду в искомой точке и направляющего вектора прямой — 1 очко.

в) Имеем:

$$z - t + 2 = y(1+2t), \quad \text{т. е.} \quad \frac{1}{5} - t + 2 = \frac{2}{5} + \frac{4}{5}t, \quad \Rightarrow \quad 2 - \frac{1}{5} = \left(1 + \frac{4}{5}\right)t,$$

откуда $t = 1$. Тогда искомое расстояние между P и L равно

$$\left|t(2x, 2y, -1)\right| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} = \sqrt{\frac{4}{25} + \frac{16}{25} + 1} = \sqrt{\frac{45}{25}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

Инструкция: Найдена величина параметра t — 1 очко.

4. Задана функция

$$f(z) = \frac{z}{\sin\left(\frac{1}{z}\right) - 1}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

а)② Найти все изолированные особые точки функции f и определить их тип.

б)④ Для окружности

$$C = \left\{ z \in \mathbb{C} \ : \ \left| z - \frac{i}{3} \right| = \frac{1}{2} \right\},$$

ориентированной против часовой стрелки, вычислить интеграл

$$\oint\limits_C f(z)\, dz.$$

Ответ: а) $z_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi k}$, $k \in \mathbb{Z}$, — полюс второго порядка, $z = \infty$ — полюс первого порядка. б) $2i(96 - \pi)$.

Решение: а) Нули знаменателя:

$$\sin\frac{1}{z} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{z} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

первая производная знаменателя в этих точках равна нулю, вторая производная — нетривиальна. Поэтому для каждого $k \in \mathbb{Z}$ точка $z_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi k}$ является нулём знаменателя второго порядка при регулярном ненулевом числителе, то есть z_k — полюс второго порядка функции f. Так как $z_k \to 0$ при $k \to \infty$, то $z = 0$ является неизолированной особой точкой f. Далее, при $z \to \infty$ имеем $f(z) \sim z$, то есть $z = \infty$ — полюс первого порядка f.

Инструкция: Верно найдены нули знаменателя — $1/2$ очка. Определён тип нуля знаменателя — $1/2$ очка. Указано, что $z = 0$ — неизолированная особая точка — $1/4$ очка. Точка $z = \infty$ объявлена изолированной особой — $1/4$ очка. Определён тип $z = \infty$ — $1/2$ очка.

б) При $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ имеем

$$\left| z_k - \frac{i}{3} \right| \le \sqrt{\frac{4}{9\pi^2} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{4+\pi^2}}{3\pi} < \frac{\sqrt{20}}{9} < \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 80 < 81.$$

Далее,

$$\left| z_0 - \frac{i}{3} \right| = \sqrt{\frac{4}{\pi^2} + \frac{1}{9}} > \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{13}}{6} > \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 13 > 9.$$

Следовательно, по теореме Коши о вычетах, получаем:

$$\oint\limits_C f(z)\, dz = -2\pi i \left(\operatorname*{res}_{z_0} f + \operatorname*{res}_{\infty} f \right).$$

Вычислим $\operatorname*{res}_{z_0} f$. Пусть $z = z_0 + t = \frac{2}{\pi} + t$. Имеем:

$$\sin\frac{1}{z} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{\pi}{2}t + \frac{\pi^2}{4}t^2 + O(t^3)\right)\right) =$$
$$= \cos\left(\frac{\pi^2}{4}t - \frac{\pi^3}{8}t^2 + O(t^3)\right) = 1 - \frac{\pi^4}{32}t^2 + \frac{\pi^5}{32}t^3 + O(t^4).$$

Тогда

$$f(z) = \frac{\frac{2}{\pi} + t}{-\frac{\pi^4}{32}t^2 + \frac{\pi^5}{32}t^3 + O(t^4)} = \left(-\frac{64}{\pi^5 t^2} - \frac{32}{\pi^4 t}\right)\left(1 + \pi t + O(t^2)\right) =$$
$$= -\frac{64}{\pi^5 t^2} - \frac{96}{\pi t} + O(1).$$

Таким образом,

$$\operatorname*{res}_{z_0} f = -\frac{96}{\pi}.$$

Вычислим $\operatorname*{res}_{\infty} f$. При $|z| > 1$ имеем:

$$f(z) = \frac{z}{-1 + \frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^3}\right)} = -z\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + O\left(\frac{1}{z^3}\right)\right) = -z - 1 - \frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

Следовательно,

$$\operatorname*{res}_{\infty} f = 1.$$

Окончательно находим:

$$\oint_C f(z)\,dz = -2\pi i\left(-\frac{96}{\pi} + 1\right) = 2i(96 - \pi).$$

Инструкция: Интеграл записан в терминах вычетов — 1 очко. Найден вычет в точке z_0 — 2 очка. Найден вычет на бесконечности — 1 очко.

5. 6 Для любого положительного числа R рассматриваются две полуокружности в комплексной плоскости

$$C_R^+ = \{\, z \in \mathbb{C} \;:\; |z| = R,\ \operatorname{Im} z > 0 \,\}, \quad C_R^- = \{\, z \in \mathbb{C} \;:\; |z| = R,\ \operatorname{Im} z < 0 \,\},$$

ориентированные против часовой стрелки. Задана функция

$$f(z) = \frac{\exp(iz)}{z^2 + iz + 2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

а) 1 Вычислить предел

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R^+} f(z)\,dz.$$

б)② Вычислить предел

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx.$$

в)③ Вычислить предел

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R^-} f(z)\,dz.$$

Ответ: а) 0; б) $\frac{2\pi}{3e}$; в) $\frac{2\pi}{3e}\left(1+3e^3\right)$.

Решение: а) По лемме Жордана сразу получаем, что

$$\int_{C_R^+} f(z)\,dz \overset{R\to+\infty}{\to} 0.$$

Действительно, $f(z)=g(z)\exp(i\alpha z)$, где $\alpha=1>0$, а функция

$$g(z)=\frac{1}{z^2+iz+2}=\frac{1}{(z-i)(z+2i)},$$

откуда при $|z|\geq R>2$ получаем

$$|g(z)|\leq\frac{1}{(R-1)(R-2)} \overset{R\to+\infty}{\to} 0.$$

Инструкция: Дан верный ответ со ссылкой на лемму Жордана — 1/2 очка. Проверены условия леммы Жордана — 1/2 очка.

б) Для любого $R>2$ рассмотрим область

$$G_R=\left\{\ z\in\mathbb{C}\ :\ |z|<R,\ \ \operatorname{Re} z>0\ \right\},$$

граница которой $\partial G_R=[-R,R]\cup C_R^+$ ориентирована против часовой стрелки. Получаем:

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx=\oint_{\partial G_R} f(z)\,dz-\int_{C_R^+} f(z)\,dz=2\pi i\operatorname*{res}_{z=i} f(z)-\int_{C_R^+} f(z)\,dz=$$

$$=2\pi i\frac{e^{-1}}{i+2i}-\int_{C_R^+} f(z)\,dz \overset{R\to+\infty}{\to}\frac{2\pi}{3e}.$$

Инструкция: Интеграл представлен разностью комплексных интегралов по ∂G_R и C_R^+ — 1 очко. Найден комплексный интеграл по ∂G_R — 1 очко.

в) Для любого $R>2$ рассмотрим область

$$B_R=\left\{\ z\in\mathbb{C}\ :\ |z|<R\ \right\},$$

граница которой $\partial B_R = C_R^- \cup C_R^+$ ориентирована против часовой стрелки. Получаем:

$$\oint\limits_{C_R^-} f(z)\,dz = \oint\limits_{\partial B_R} f(z)\,dz - \int\limits_{C_R^+} f(z)\,dz =$$

$$= 2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=i} f(z) + \operatorname*{res}_{z=-2i} f(z)\right) - \int\limits_{C_R^+} f(z)\,dz =$$

$$= 2\pi i\left(\frac{e^{-1}}{i+2i} + \frac{e^2}{2i-i}\right) - \int\limits_{C_R^+} f(z)\,dz \overset{R\to+\infty}{\to} 2\pi\left(\frac{1}{3e} + e^2\right) = \frac{2\pi}{3e}\left(1+3e^3\right).$$

Инструкция: Интеграл представлен разностью комплексных интегралов по ∂B_R и C_R^+ — 2 очка. Найден комплексный интеграл по ∂B_R — 1 очко.

ОЧКИ	**ОЦЕНКА**
0–2	НЕУД. (1)
3–5	НЕУД. (2)
6–8	УДОВЛ. (3)
9–11	УДОВЛ. (4)
12–14	ХОР. (5)
15–17	ХОР. (6)
18–20	ХОР. (7)
21–23	ОТЛ. (8)
24–26	ОТЛ. (9)
27–30	ОТЛ. (10)